

CAPÍTULO IV

Matrizes

I. Noção de matriz

Dados dois números, m e n , naturais e não nulos, chama-se **matriz m por n** (indica-se $m \times n$) toda tabela M formada por números reais distribuídos em m linhas e n colunas.

30. Exemplos:

$$1^{\circ}) \begin{bmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 0 & \frac{4}{5} & \sqrt{2} \end{bmatrix} \text{ é matriz } 2 \times 3. \quad 4^{\circ}) \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} \text{ é matriz } 3 \times 1.$$

$$2^{\circ}) \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ \frac{3}{7} & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \text{ é matriz } 3 \times 2. \quad 5^{\circ}) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} \text{ é matriz } 2 \times 2.$$

$$3^{\circ}) [0 \quad 9 \quad -1 \quad 7] \text{ é matriz } 1 \times 4. \quad 6^{\circ}) [2] \text{ é matriz } 1 \times 1.$$

31. Em uma matriz qualquer M , cada elemento é indicado por a_{ij} . O índice i indica a linha e o índice j a coluna às quais o elemento pertence. Com a convenção de que as linhas sejam numeradas de cima para baixo (de 1 até m) e as colunas, da esquerda para a direita (de 1 até n), uma matriz $m \times n$ é representada por:

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ ou } M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ ou}$$

$$M = \left\| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{array} \right\|$$

Uma matriz M do tipo $m \times n$ também pode ser indicada por: $M = (a_{ij})$; $i \in \{1, 2, 3, \dots, m\}$ e $j \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ ou simplesmente $M = (a_{ij})_{m \times n}$.

II. Matrizes especiais

Há matrizes que, por apresentarem uma utilidade maior nesta teoria, recebem um nome especial:

32. a) **matriz linha** é toda matriz do tipo $1 \times n$, isto é, é uma matriz que tem uma única linha (3º exemplo da página 45).

b) **matriz coluna** é toda matriz do tipo $m \times 1$, isto é, é uma matriz que tem uma única coluna (4º exemplo da página 45).

c) **matriz nula** é toda matriz que tem todos os elementos iguais a zero.

Exemplos:

1º) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ é a matriz nula do tipo 2×3 .

2º) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ é a matriz nula do tipo 2×2 .

33. d) **matriz quadrada de ordem n** é toda matriz do tipo $n \times n$, isto é, uma matriz que tem igual número de linhas e colunas:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Chama-se **diagonal principal** de uma matriz quadrada de ordem n o conjunto dos elementos que têm os dois índices iguais, isto é,

$$\{a_{ij} | i = j\} = \{a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}\}$$

Chama-se **diagonal secundária** de uma matriz quadrada de ordem n o conjunto dos elementos que têm soma dos índices igual a $n + 1$, isto é,

$$\{a_{ij} | i + j = n + 1\} = \{a_{1n}, a_{2, n-1}, a_{3, n-2}, \dots, a_{n1}\}$$

Exemplos:

1º) A matriz $M = \begin{bmatrix} 8 & 9 & -7 \\ 6 & 4 & -5 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ é quadrada de ordem 3.

Sua diagonal principal é $\{8, 4, 3\}$ e sua diagonal secundária é $\{-7, 4, -1\}$.

2º) A matriz $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & -1 & -2 \\ -3 & -4 & -5 & -6 \end{bmatrix}$ é quadrada de ordem 4.

Sua diagonal principal é $\{0, 5, -1, -6\}$ e sua diagonal secundária é $\{3, 6, 9, -3\}$.

34. e) **matriz diagonal** é toda matriz quadrada em que os elementos que não pertencem à diagonal principal são iguais a zero.

Exemplos:

$$\begin{array}{lll}
 1^\circ) \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} & 3^\circ) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & 5^\circ) \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 2^\circ) \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} & 4^\circ) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} &
 \end{array}$$

35. f) **matriz unidade** (ou **matriz identidade**) **de ordem n** (indica-se I_n) é toda matriz diagonal em que os elementos da diagonal principal são iguais a 1.

Exemplos:

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

EXERCÍCIOS

186. Indique explicitamente os elementos da matriz $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$ tal que $a_{ij} = i - j$.

Solução

Temos, por definição:

$$\begin{array}{lll}
 a_{11} = 1 - 1 = 0, & a_{12} = 1 - 2 = -1, & a_{13} = 1 - 3 = -2 \\
 a_{21} = 2 - 1 = 1, & a_{22} = 2 - 2 = 0, & a_{23} = 2 - 3 = -1 \\
 a_{31} = 3 - 1 = 2, & a_{32} = 3 - 2 = 1, & a_{33} = 3 - 3 = 0
 \end{array}$$

Assim, a matriz é: $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

187. Construa as seguintes matrizes:

$$A = (a_{ij})_{3 \times 3} \text{ tal que } a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

$$B = (b_{ij})_{3 \times 3} \text{ tal que } b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i + j = 4 \\ 0, & \text{se } i + j \neq 4 \end{cases}$$

188. A é uma matriz 3 por 2 definida pela lei $a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ i^2, & \text{se } i \neq j \end{cases}$. Escreva a matriz A.

189. Dada uma matriz $A_{m \times n}$ e as operações:

1) $+ / A$, que transforma a matriz A numa outra matriz $A'_{m \times 1}$ em que cada elemento da única coluna de A' é obtido somando-se os elementos da linha correspondente de A.

2) $+ \neq A$, que transforma a matriz $A_{m \times n}$ numa outra matriz $A''_{1 \times n}$ em que cada elemento da única linha de A'' é obtido somando-se os elementos da coluna correspondente de A.

Nessas condições, se A for a matriz identidade de ordem p , calcule a expressão $+ / (+ \neq A)$.

III. Igualdade

36. Definição

Duas matrizes, $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$, são iguais quando $a_{ij} = b_{ij}$ para todo i ($i \in \{1, 2, 3, \dots, m\}$) e todo j ($j \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$). Isso significa que, para serem iguais, duas matrizes devem ser do mesmo tipo e apresentar todos os elementos correspondentes iguais (elementos com índices iguais).

Exemplos:

$$1^\circ) \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 7 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 7 & -4 \end{bmatrix}, \text{ pois } a_{11} = b_{11}, a_{12} = b_{12}, a_{21} = b_{21} \text{ e } a_{22} = b_{22}.$$

$$2^\circ) \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 7 & -4 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}, \text{ pois } a_{12} \neq b_{12} \text{ e } a_{21} \neq b_{21}.$$

EXERCÍCIOS

190. Determine x e y de modo que se tenha $\begin{bmatrix} 2x & 3y \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+1 & 2y \\ 3 & y+4 \end{bmatrix}$.

Solução

Temos, por definição, que satisfazer o sistema:

$$\begin{cases} 2x = x + 1 \\ 3y = 2y \\ 4 = y + 4 \end{cases} \quad \text{e, então, } x = 1 \text{ e } y = 0.$$

191. Determine x , y , z e t de modo que se tenha

$$\begin{bmatrix} x^2 & 2x & y \\ 4 & 5 & t^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & x & 3 \\ z & 5t & t \end{bmatrix}$$

IV. Adição

37. Definição

Dadas duas matrizes, $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$, chama-se **soma** $A + B$ a matriz $C = (c_{ij})_{m \times n}$ tal que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, para todo i e todo j . Isso significa que a soma de duas matrizes A e B do tipo $m \times n$ é uma matriz C do mesmo tipo em que cada elemento é a soma dos elementos correspondentes em A e B .

38. Exemplos:

$$\begin{aligned} 1^\circ) \quad & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -4 & 0 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+4 & 2-1 & 3+1 \\ 4-4 & 5+0 & 6-6 \end{bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$2^{\circ}) \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7+0 & 8+1 \\ 9+2 & 9+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 11 & 12 \end{bmatrix}$$

$$3^{\circ}) \begin{bmatrix} 5 \\ 11 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5+1 \\ 11-2 \\ 3+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ 15 \\ 4 \end{bmatrix}$$

39. Teorema

A adição de matrizes do tipo $m \times n$ apresenta as seguintes propriedades:

- (1) é associativa: $(A + B) + C = A + (B + C)$ quaisquer que sejam A, B e C do tipo $m \times n$;
- (2) é comutativa: $A + B = B + A$ quaisquer que sejam A e B, do tipo $m \times n$;
- (3) tem elemento neutro: $\exists M | A + M = A$ qualquer que seja A do tipo $m \times n$;
- (4) todo elemento tem simétrico: para todo A do tipo $m \times n$:
 $\exists A' | A + A' = M$.

Demonstração:

- (1) Fazendo $(A + B) + C = X$ e $A + (B + C) = Y$, temos:
 Para todo i e todo j
 $x_{ij} = (a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij} = a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij}) = y_{ij}$.
- (2) Fazendo $A + B = X$ e $B + A = Y$, temos:
 $x_{ij} = a_{ij} + b_{ij} = b_{ij} + a_{ij} = y_{ij}$.
- (3) Impondo $A + M = A$, resulta:
 $a_{ij} + m_{ij} = a_{ij} \Rightarrow m_{ij} = 0 \Rightarrow M = 0$
 isto é, o elemento neutro é a matriz nula do tipo $m \times n$.
- (4) Impondo $A + A' = M = 0$, resulta:
 $a_{ij} + a'_{ij} = 0 \Rightarrow a'_{ij} = -a_{ij} \forall i, \forall j$
 isto é, a simétrica da matriz A para a adição é a matriz A' de mesmo tipo que A, na qual cada elemento é simétrico do correspondente em A.

40. Definição

Dada a matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$, chama-se **oposta de A** (indica-se $-A$) a matriz A' tal que $A + A' = 0$.

Exemplos:

$$1^\circ) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & \frac{4}{5} \end{bmatrix} \Rightarrow -A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 3 & -\frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

$$2^\circ) \quad A = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 7 \\ -\sqrt{2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow -A = \begin{bmatrix} -9 & -8 & -7 \\ \sqrt{2} & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

41. Definição

Dadas duas matrizes, $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$, chama-se **diferença** $A - B$ a matriz soma de A com a oposta de B.

Exemplo:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 11 & 9 & 8 & 1 \\ -1 & 4 & 7 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 7 & 8 & -1 \end{bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} 11 & 9 & 8 & 1 \\ -1 & 4 & 7 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \\ -4 & -7 & -8 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 9 & 7 & 0 \\ -5 & -3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

EXERCÍCIOS

192. Dadas $A = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$, calcule $A + B$ e $A - B$.

193. Dadas $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 3 & 9 & 11 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -5 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix}$,

calcule $A + B + C$, $A - B + C$, $A - B - C$ e $-A + B - C$.

194. Calcule a soma $C = (c_{ij})_{3 \times 3}$ das matrizes $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$ e $B = (b_{ij})_{3 \times 3}$ tais que $a_{ij} = i^2 + j^2$ e $b_{ij} = 2ij$.

195. Seja $C = (c_{ij})_{2 \times 3}$ a soma das matrizes $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 \end{bmatrix}$.

Calcule a soma $c_{21} + c_{22} + c_{23}$.

196. Determine α , β , γ e δ de modo que se tenha:

$$\begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & \beta \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$$

197. Determine x e y de modo que se tenha:

$$\begin{bmatrix} y^3 & 3x \\ y^2 & 4x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -y & x^2 \\ 2y & x^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 10 & -1 \end{bmatrix}$$

198. Dadas as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 7 & 6 \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$$

determine a matriz X tal que $X + A = B - C$.

Solução 1

$$\text{Fazendo } X = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}, \text{ temos: } \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 7 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x+1 & y+2 \\ z+2 & t+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x+1=1, y+2=-2, z+2=2 \text{ e } t+3=8)$$

$$\Rightarrow (x=0, y=-4, z=0 \text{ e } t=5), \text{ então } X = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Solução 2

Utilizando as propriedades da adição, temos:

$$X + A = B - C \Rightarrow X + A - A = B - C - A \Rightarrow X = B - C - A$$

$$\text{então: } X = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 7 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

199. Resolva a equação matricial $X - A - B = C$, sendo dadas:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

200. Obtenha X tal que:

$$X + \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

201. Define-se **distância** entre duas matrizes $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ quadradas e de mesma ordem n pela fórmula:

$$d(A; B) = \max |a_{ij} - b_{ij}|, i, j = 1, 2, \dots, n.$$

$$\text{Calcule a distância entre as matrizes } \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}.$$

V. Produto de número por matriz

42. Definição

Dado um número k e uma matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$, chama-se **produto kA** a matriz $B = (b_{ij})_{m \times n}$ tal que $b_{ij} = k \cdot a_{ij}$ para todo i e *todo* j . Isso significa que multiplicar uma matriz A por um número k é construir uma matriz B formada pelos elementos de A todos multiplicados por k .

43. Exemplos:

$$1^{\circ}) \quad 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 5 & -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 21 & 6 \\ 15 & -3 & -6 \end{bmatrix}$$

$$2^{\circ}) \quad \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 8 & 6 & 4 \\ 10 & 12 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \\ 5 & 6 & -3 \end{bmatrix}$$

44. Teorema

O produto de um número por uma matriz apresenta as seguintes propriedades:

- (1) $a \cdot (b \cdot A) = (a \cdot b) \cdot A$
- (2) $a \cdot (A + B) = a \cdot A + a \cdot B$
- (3) $(a + b) \cdot A = a \cdot A + b \cdot A$
- (4) $1 \cdot A = A$

em que A e B são matrizes quaisquer do tipo $m \times n$ e a e b são números reais quaisquer.

Deixamos a demonstração desse teorema como exercício para o leitor.

EXERCÍCIOS

202. Calcule as matrizes $2A$, $\frac{1}{3}B$ e $\frac{1}{2}(A + B)$, sendo dadas

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}.$$

203. Se $a \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, determine os valores de a, b e c.

204. Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$,

determine X em cada uma das equações abaixo:

a) $2X + A = 3B + C$

c) $3X + A = B - X$

b) $X + A = \frac{1}{2}(B - C)$

d) $\frac{1}{2}(X - A - B) = \frac{1}{3}(X - C)$

205. Se $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, determine a matriz X de

ordem 2, tal que $\frac{X - A}{2} = \frac{B + X}{3} + C$.

206. Resolva o sistema:

$$\begin{cases} X + Y = 3A \\ X - Y = 2B \end{cases} \text{ em que } A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Solução

Somando membro a membro as duas equações, resulta:

$$X + Y + X - Y = 3A + 2B \Rightarrow 2X = 3A + 2B \Rightarrow X = \frac{1}{2}(3A + 2B)$$

Subtraindo membro a membro as duas equações, resulta:

$$X + Y - X + Y = 3A - 2B \Rightarrow 2Y = 3A - 2B \Rightarrow Y = \frac{1}{2}(3A - 2B)$$

Temos:

$$X = \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 10 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 8 & 10 \\ 6 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$Y = \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 10 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 & -10 \\ -6 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$$

207. Determine as matrizes X e Y que satisfazem o sistema

$$\begin{cases} X + Y = A \\ X - Y = B \end{cases}, \text{ sendo dadas } A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

208. Obtenha X e Y a partir do sistema:

$$\begin{cases} 2X + 3Y = A + B \\ 3X + 4Y = A - B \end{cases} \text{ em que } A = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

VI. Produto de matrizes

45. Definição

Dadas duas matrizes, $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{jk})_{n \times p}$, chama-se **produto AB** a matriz $C = (c_{ik})_{m \times p}$ tal que

$$c_{ik} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + a_{i3} \cdot b_{3k} + \dots + a_{in} \cdot b_{nk} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}$$

para todo $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ e todo $k \in \{1, 2, \dots, p\}$.

46. Observações:

1ª) A definição dada garante a existência do produto AB somente se o número de colunas de A for igual ao número de linhas de B , pois A é do tipo $m \times n$ e B é do tipo $n \times p$.

2ª) A definição dada afirma que o produto AB é uma matriz que tem o número de linhas de A e o número de colunas de B , pois $C = AB$ é do tipo $m \times p$.

3ª) Ainda pela definição, um elemento c_{ik} da matriz AB deve ser obtido pelo procedimento seguinte:

(I) toma-se a linha i da matriz A :

$$a_{i1} \quad a_{i2} \quad a_{i3} \quad \dots \quad a_{in}$$

(n elementos)

(II) toma-se a coluna k da matriz B :

$$\begin{array}{c} b_{1k} \\ b_{2k} \\ b_{3k} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{array} \quad (n \text{ elementos})$$

(III) coloca-se a linha i de A na “vertical” ao lado da coluna k de B (conforme esquema):

$$\begin{array}{c} a_{i1} \\ a_{i2} \\ a_{i3} \\ \vdots \\ a_{in} \end{array} \quad \begin{array}{c} b_{1k} \\ b_{2k} \\ b_{3k} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{array}$$

(IV) calculam-se os n produtos dos elementos que ficaram lado a lado (conforme esquema):

$$\begin{array}{c} a_{i1} \cdot b_{1k} \\ a_{i2} \cdot b_{2k} \\ a_{i3} \cdot b_{3k} \\ \vdots \\ a_{in} \cdot b_{nk} \end{array}$$

(V) somam-se esses n produtos, obtendo c_{ik} .

47. Exemplos:

1º) Dadas

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}, \text{ calcular } AB.$$

Seendo A do tipo 2×3 e B do tipo 3×1 , decorre que existe AB e é do tipo 2×1 . Fazendo $AB = C$, devemos calcular c_{11} e c_{21} :

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1^{\text{a}} \text{ l. de A} \times 1^{\text{a}} \text{ c. de B}) \\ (2^{\text{a}} \text{ l. de A} \times 1^{\text{a}} \text{ c. de B}) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} (1 \times 7) \\ (2 \times 8) \\ (3 \times 9) \\ (4 \times 7) \\ (5 \times 8) \\ (6 \times 9) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (7 + 16 + 27) \\ (28 + 40 + 54) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 122 \end{bmatrix}$$

2º) Dadas $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$, calcular AB.

Seendo A do tipo 2×2 e B do tipo 2×2 , decorre que existe AB e é do tipo 2×2 . Fazendo $AB = C$, temos:

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1^{\text{a}} \text{ l. de A} \times 1^{\text{a}} \text{ c. de B}) & (1^{\text{a}} \text{ l. de A} \times 2^{\text{a}} \text{ c. de B}) \\ (2^{\text{a}} \text{ l. de A} \times 1^{\text{a}} \text{ c. de B}) & (2^{\text{a}} \text{ l. de A} \times 2^{\text{a}} \text{ c. de B}) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} (1 \times 5) & (1 \times 6) \\ (2 \times 7) & (2 \times 8) \\ (3 \times 5) & (3 \times 6) \\ (4 \times 7) & (4 \times 8) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 + 14 & 6 + 16 \\ 15 + 28 & 18 + 32 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix}$$

EXERCÍCIOS

209. Calcule os seguintes produtos:

a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} [3 \quad 1 \quad 1 \quad 2]$

$$c) \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$e) \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$d) \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & 7 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$f) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

210. Considere as matrizes:

$A = (a_{ij})$, 4×7 , definida por $a_{ij} = i - j$.

$B = (b_{ij})$, 7×9 , definida por $b_{ij} = i$.

$C = (c_{ij})$, $C = AB$.

Determine o elemento c_{23} .

211. Sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, calcule A^2 , A^3 , A^4 e A^n ($n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 1$).

Solução

$$A^2 = AA = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = A^3A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Observamos que em cada multiplicação por A os elementos a_{11} , a_{21} e a_{22} não se alteram e o elemento a_{12} sofre acréscimo de 1. Provaremos por indução finita sobre n que:

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

212. Calcule AB , BA , A^2 e B^2 , sabendo que

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

213. Calcule o produto ABC , sendo dadas:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Solução

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 1 & 1 \times 1 & 1 \times 1 \\ 2 \times 3 & 2 \times 2 & 2 \times 1 \\ 5 \times 1 & 5 \times 1 & 5 \times 1 \\ 1 \times 3 & 1 \times 2 & 1 \times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 3 \\ 8 & 7 & 6 \end{bmatrix}$$

$$(AB)C = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 3 \\ 8 & 7 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \times 3 & 7 \times 1 \\ 5 \times 1 & 5 \times 0 \\ 3 \times 2 & 3 \times -1 \\ 8 \times 3 & 8 \times 1 \\ 7 \times 1 & 7 \times 0 \\ 6 \times 2 & 6 \times -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 & 4 \\ 43 & 2 \end{bmatrix}$$

214. Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$, determine $A^2 + 2A - 11 \cdot I$, em que $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

215. Calcule os seguintes produtos:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

216. Resolva a equação matricial:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -5 & 9 \end{bmatrix}$$

Solução

A equação dada equivale a:

$$\begin{bmatrix} 3a - 2b & a + 2b \\ 3c - 2d & c + 2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -5 & 9 \end{bmatrix}$$

então:

$$\begin{cases} 3a - 2b = 5 \\ a + 2b = 7 \end{cases} \Rightarrow a = 3 \text{ e } b = 2$$

$$\begin{cases} 3c - 2d = -5 \\ c + 2d = 9 \end{cases} \Rightarrow c = 1 \text{ e } d = 4$$

e a resposta é $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$.

217. Resolva as seguintes equações:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -5 & 9 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

218. Se $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \end{bmatrix}$, determine os valores de x e y.

219. Sabe-se que $A = \begin{bmatrix} x & 1 & 2 \\ 3 & y & 5 \\ 2 & 3 & z \end{bmatrix}$, $B = (b_{ij})$ é uma matriz diagonal ($b_{ij} = 0$ se $i \neq j$)

e $AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 10 \\ 6 & 12 & 25 \\ 4 & 9 & 20 \end{bmatrix}$. Determine os valores de x, y e z.

48. Teorema

Se $A = (a_{ij})_{m \times n}$, então $AI_n = A$ e $I_m A = A$.

Demonstração:

I) Sendo $I_n = (\delta_{ij})_{n \times n}$ e $B = AI_n = (b_{ij})_{m \times n}$, temos:

$$\begin{aligned} b_{ij} &= a_{i1}\delta_{1j} + a_{i2}\delta_{2j} + a_{i3}\delta_{3j} + \dots + a_{ii}\delta_{ii} + \dots + a_{in}\delta_{nj} = \\ &= a_{i1} \cdot 0 + a_{i2} \cdot 0 + a_{i3} \cdot 0 + \dots + a_{ii} \cdot 1 + \dots + a_{in} \cdot 0 = a_{ii} \text{ para todos } i \text{ e } j, \text{ então } A \cdot I_n = A. \end{aligned}$$

II) Analogamente.

49. Teorema

A multiplicação de matrizes apresenta as seguintes propriedades:

(1) é associativa: $(AB)C = A(BC)$ quaisquer que sejam as matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{jk})_{n \times p}$ e $C = (c_{kl})_{p \times r}$;

(2) é distributiva à direita em relação à adição: $(A + B)C = AC + BC$ quaisquer que sejam as matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{ij})_{m \times n}$ e $C = (c_{jk})_{n \times p}$;

(3) é distributiva à esquerda: $C(A + B) = CA + CB$ quaisquer que sejam as matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{ij})_{m \times n}$ e $C = (c_{ki})_{p \times m}$;

(4) $(kA)B = A(kB) = k(AB)$ quaisquer que sejam o número k e as matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{jk})_{n \times p}$.

Demonstração:

(1) Fazendo $D = AB = (d_{ik})_{m \times p}$, $E = (AB)C = (e_{i\ell})_{m \times r}$ e $F = BC = (f_{j\ell})_{n \times r}$, temos:

$$\begin{aligned} e_{i\ell} &= \sum_{k=1}^p d_{ik} \cdot c_{k\ell} = \sum_{k=1}^p \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot b_{jk} \right) \cdot c_{k\ell} = \\ &= \sum_{k=1}^p \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot b_{jk} \cdot c_{k\ell} \right) = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot \left(\sum_{k=1}^p b_{jk} \cdot c_{k\ell} \right) = \\ &= \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot f_{j\ell} \end{aligned}$$

então $(AB)C = A(BC)$.

(2) Fazendo $D = (A + B)C = (d_{ik})_{m \times p}$, temos:

$$\begin{aligned} d_{ik} &= \sum_{j=1}^n (a_{ij} + b_{ij}) \cdot c_{jk} = \sum_{j=1}^n (a_{ij} \cdot c_{jk} + b_{ij} \cdot c_{jk}) = \\ &= \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot c_{jk} + \sum_{j=1}^n b_{ij} \cdot c_{jk} \end{aligned}$$

então $(A + B)C = AC + BC$.

(3) Análoga a (2).

(4) Fazendo $C = kA = (c_{ij})_{m \times n}$, $D = kB = (d_{jk})_{n \times p}$ e $E = AB = (e_{ik})_{m \times p}$, temos:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n c_{ij} \cdot b_{jk} &= \sum_{j=1}^n (k \cdot a_{ij}) \cdot b_{jk} = k \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot b_{jk} \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot d_{jk} &= \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot (k \cdot b_{jk}) = k \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot b_{jk} \end{aligned}$$

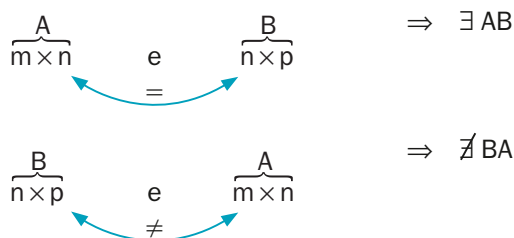
então $(kA)B = A(kB) = k(AB)$.

50. Observações:

É muito importante notar que a multiplicação de matrizes não é comutativa, isto é, para duas matrizes quaisquer A e B é falso que $AB = BA$ necessariamente.

Exemplos:

1º) Há casos em que existe AB e não existe BA . Isso ocorre quando A é $m \times n$, B é $n \times p$ e $m \neq p$:



2º) Há casos em que existem AB e BA , porém são matrizes de tipos diferentes e, portanto, $AB \neq BA$. Isso ocorre quando A é $m \times n$, B é $n \times m$ e $m \neq n$:

$$\begin{array}{ccc} \overbrace{A}^{m \times n} & \xrightarrow[e]{=} & \overbrace{B}^{n \times m} \quad \Rightarrow \quad \exists \overbrace{AB}^{m \times m} \\ \overbrace{B}^{n \times m} & \xrightarrow[e]{=} & \overbrace{A}^{m \times n} \quad \Rightarrow \quad \exists \overbrace{BA}^{n \times n} \end{array}$$

3º) Mesmo nos casos em que AB e BA são do mesmo tipo (o que ocorre quando A e B são quadradas e de mesma ordem), temos quase sempre $AB \neq BA$. Assim, por exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow AB = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 26 & 10 \end{bmatrix} \text{ e } BA = \begin{bmatrix} 14 & 15 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$$

Quando A e B são tais que $AB = BA$, dizemos que A e B comutam. Notemos que uma condição necessária para A e B comutarem é que sejam quadradas e de mesma ordem.

Exemplos:

$$1^\circ) \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ comuta com } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$2^\circ) \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ comuta com } \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$3^\circ) \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ comuta com } \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

É importante observar também que a implicação

$$AB = 0 \Rightarrow A = 0 \text{ ou } B = 0$$

não é válida para matrizes, isto é, é possível encontrar duas matrizes não nulas cujo produto é a matriz nula.

Exemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

EXERCÍCIOS

220. Sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, qual das matrizes abaixo comuta com A?

$$B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

221. Determine x e y de modo que as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ x & y \end{bmatrix} \text{ comutem.}$$

222. Obtenha todas as matrizes B que comutam com $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$.

Solução

Notemos inicialmente que uma condição necessária para que A e B sejam comutáveis é que A e B sejam quadradas e de mesma ordem. Assim, fazendo

$$B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \text{ temos: } \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \text{ isto é:}$$

$$\begin{bmatrix} a-c & b-d \\ 3a & 3b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+3b & -a \\ c+3d & -c \end{bmatrix} \text{ e então: } \begin{cases} a-c = a+3b & (1) \\ b-d = -a & (2) \\ 3a = c+3d & (3) \\ 3b = -c & (4) \end{cases}$$

De (1) e (4) vem $c = -3b$.

De (2) e (3) vem $d = a + b$.

Resposta: $B = \begin{bmatrix} a & b \\ -3b & a + b \end{bmatrix}$ com $a, b \in \mathbb{R}$.

223. Calcule, em cada caso, as matrizes que comutam com A.

$$\text{a) } A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{b) } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{c) } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

224. Prove que, se A e B são matrizes comutáveis, então vale a igualdade:

$$(A + B)(A - B) = A^2 - B^2.$$

Solução

Lembrando que $AB = BA \Leftrightarrow BA - AB = 0$, temos:

$$\begin{aligned} (A + B)(A - B) &= A(A - B) + B(A - B) = A^2 - AB + BA - B^2 = \\ &= A^2 + (BA - AB) - B^2 = A^2 + 0 - B^2 = A^2 - B^2 \end{aligned}$$

225. Prove que, se A e B são matrizes comutáveis, então valem as seguintes igualdades:

- a) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
- b) $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$
- c) $(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$
- d) $(A - B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$
- e) $(AB)^n = A^nB^n$

226. Sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & -8 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$, calcule:

- a) $(A + B)^2$
- b) $(A + B)(A - B)$
- c) $A^2 - 2I_2A + I_2^2$
- d) $A^3 - I_2^3$

227. Calcule todas as matrizes X , quadradas de ordem 2 tais que $X^2 = 0$.

Solução

Fazendo $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, resulta: $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ca + dc & cb + d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

então:
$$\begin{cases} a^2 + bc = 0 & (1) \\ b(a + d) = 0 & (2) \\ c(a + d) = 0 & (3) \\ bc + d^2 = 0 & (4) \end{cases}$$

1ª possibilidade: $b = 0$

$$\begin{cases} (1) \Rightarrow a^2 = 0 \Rightarrow a = 0 \\ (4) \Rightarrow d^2 = 0 \Rightarrow d = 0 \end{cases} \Rightarrow a + d = 0 \Rightarrow (3) \text{ é satisfeita } \forall c \in \mathbb{R}.$$

2ª possibilidade: $b \neq 0$.

$$(2) \Rightarrow a + d = 0 \Rightarrow d = -a$$

$$(1) \text{ e } (4) \Rightarrow bc = -a^2 \Rightarrow c = -\frac{a^2}{b}$$

Resposta:

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix} \text{ com } c \in \mathbb{R} \text{ ou } X = \begin{bmatrix} a & b \\ -\frac{a^2}{b} & -a \end{bmatrix} \text{ com } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

228. Calcule todas as matrizes X , quadradas de ordem 2, tais que $X^2 = I_2$.

229. Calcule todas as matrizes X , quadradas de ordem 2, tais que $X^2 = X$.

VII. Matriz transposta

51. Definição

Dada uma matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$, chama-se **transposta de A** a matriz $A^t = (a'_{ji})_{n \times m}$ tal que $a'_{ji} = a_{ij}$, para todo i e todo j . Isso significa que, por exemplo, a'_{11} , a'_{21} , a'_{31} , ..., a'_{n1} são respectivamente iguais a a_{11} , a_{12} , a_{13} , ..., a_{1n} ; vale dizer que a 1ª coluna de A^t é igual à 1ª linha de A . Repetindo o raciocínio, chegaríamos à conclusão de que as colunas de A^t são ordenadamente iguais às linhas de A .

52. Exemplos:

$$1^\circ) A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

$$2^\circ) A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{bmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{bmatrix}$$

$$3^\circ) A = [1 \ 3 \ 5 \ 7] \Rightarrow A^t = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

53. Teorema

A matriz transposta apresenta as seguintes propriedades:

- (1) $(A^t)^t = A$ para toda matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$;
- (2) Se $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$, então $(A + B)^t = A^t + B^t$;
- (3) Se $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $k \in \mathbb{R}$, então $(kA)^t = kA^t$;
- (4) Se $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{n \times p}$, então $(AB)^t = B^tA^t$.

Demonstração:

- (1) Fazendo $(A^t)^t = (a''_{ji})_{m \times n}$, resulta:

$$a''_{ij} = a'_{ji} = a_{ij} \text{ para todos } i, j.$$

(2) Fazendo $A + B = C = (c_{ij})_{m \times n}$ e $(A + B)^t = C^t = (c'_{ji})_{n \times m}$, temos:
 $c'_{ji} = c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} = a'_{ji} + b'_{ji}$ para todos i, j .

(3) Fazendo $(kA)^t = (a''_{ji})_{n \times m}$, resulta:
 $a''_{ji} = ka_{ij} = ka'_{ji}$ para todos i, j .

(4) Fazendo $AB = C = (c_{ik})_{m \times p}$ e $(AB)^t = C^t = (c'_{ki})_{p \times m}$, resulta:

$$c'_{ki} = c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} = \sum_{j=1}^n b_{jk} a_{ij} = \sum_{j=1}^n b'_{kj} a'_{ji}.$$

54. Aplicação

Verificar diretamente a validade do teorema anterior com

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \text{ e } k = 2.$$

$$(1) \quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \Rightarrow (A^t)^t = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = A$$

$$(2) \quad A + B = \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix} \Rightarrow (A+B)^t = \begin{bmatrix} a+e & c+g \\ b+f & d+h \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & g \\ f & h \end{bmatrix} = A^t + B^t$$

$$(3) \quad 2 \cdot A = \begin{bmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{bmatrix} \Rightarrow (2A)^t = \begin{bmatrix} 2a & 2c \\ 2b & 2d \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = 2A^t$$

$$(4) \quad AB = \begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix} \Rightarrow (AB)^t = \begin{bmatrix} ae+bg & ce+dg \\ af+bh & cf+dh \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} e & g \\ f & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = B^t A^t$$

55. Definição

Chama-se **matriz simétrica** toda matriz quadrada A , de ordem n , tal que

$$A^t = A.$$

Decorre da definição que, se $A = (a_{ij})$ é uma matriz simétrica, temos:

$$a_{ij} = a_{ji}; \forall i, \forall j \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$$

isto é, os elementos simetricamente dispostos em relação à diagonal principal são iguais.

Exemplo:

São simétricas as matrizes:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ b & e & f & g \\ c & f & h & i \\ d & g & i & j \end{bmatrix}$$

56. Definição

Chama-se **matriz antissimétrica** toda matriz quadrada A , de ordem n , tal que

$$A^t = -A.$$

Decorre da definição que, se $A = (a_{ij})$ é uma matriz antissimétrica, temos:

$$a_{ij} = -a_{ji}; \forall i, \forall j \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$$

isto é, os elementos simetricamente dispostos em relação à diagonal principal são opostos.

Exemplo:

São antissimétricas as matrizes:

$$\begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{bmatrix}$$

EXERCÍCIOS

230. Determine, em cada caso, a matriz X:

$$\text{a) } X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 7 & 2 \end{bmatrix}^t$$

$$\text{b) } X + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}^t$$

$$\text{c) } 2X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}^t$$

$$\text{d) } 3X^t = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$$

231. Sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e A^t a matriz transposta de A, determine o valor de $A^t \cdot B$.

232. Determine x, y, z para que a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x & 5 \\ 2 & 7 & -4 \\ y & z & -3 \end{bmatrix} \text{ seja simétrica.}$$

233. Determine x, y e z de modo que a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 2 \\ x & 0 & 1-z \\ y & 2z & 0 \end{bmatrix} \text{ seja antissimétrica.}$$

234. Prove que, se A e B são matrizes simétricas de ordem n, então $A + B$ também é simétrica.

VIII. Matrizes inversíveis

57. Definição

Seja A uma matriz quadrada de ordem n . Dizemos que A é **matriz inversível** se existir uma matriz B tal que $AB = BA = I_n$. Se A não é inversível, dizemos que A é uma matriz singular.

58. Teorema

Se A é inversível, então é única a matriz B tal que $AB = BA = I_n$.

Demonstração:

Admitamos que exista uma matriz C tal que $AC = CA = I_n$. Temos:

$$C = I_n C = (BA)C = B(AC) = BI_n = B.$$

59. Definição

Dada uma matriz inversível A , chama-se **inversa de A** a matriz A^{-1} (que é única) tal que $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.

É evidente que A^{-1} deve ser também quadrada de ordem n , pois A^{-1} comuta com A .

Exemplos:

$$1^\circ) \quad \text{A matriz } A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \text{ é inversível e } A^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \text{ pois:}$$

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

$$A^{-1}A = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

$$2^\circ) \quad \text{A matriz } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \end{bmatrix} \text{ é inversível e } A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 31 & -19 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \end{bmatrix}, \text{ pois:}$$

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 31 & -19 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3$$

$$A^{-1}A = \begin{bmatrix} 1 & 31 & -19 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3$$

3º) Qual é a inversa da matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 11 \end{bmatrix}$?

Fazendo $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, temos:

$$A^{-1}A = I_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 3a + 5b & 7a + 11b \\ 3c + 5d & 7c + 11d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pela definição de igualdade de matrizes, temos:

$$\begin{cases} 3a + 5b = 1 \\ 7a + 11b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = -\frac{11}{2} \text{ e } b = \frac{7}{2}$$

e

$$\begin{cases} 3c + 5d = 0 \\ 7c + 11d = 1 \end{cases} \Rightarrow c = \frac{5}{2} \text{ e } d = -\frac{3}{2}$$

$$\text{isto é, } A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{11}{2} & \frac{7}{2} \\ \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}, \text{ pois temos também:}$$

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{11}{2} & \frac{7}{2} \\ \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

4º) A matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$ é singular (não é inversível), pois, se $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, decorre:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} a + 2c & b + 2d \\ 4a + 8c & 4b + 8d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e então:}$$

$$\underbrace{a + 2c = 1, 4a + 8c = 0}_{\text{impossível}}, \underbrace{b + 2d = 0 \text{ e } 4b + 8d = 1}_{\text{impossível}}$$

Portanto, não existem a, b, c, d satisfazendo a definição.

5º) Qual é a inversa da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 9 & 1 \end{bmatrix}$?

Fazendo $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$, resulta:

$$A^{-1}A = I_3 \Rightarrow \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 9 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} a + 2b + 4c & a + 3b + 9c & a + b + c \\ d + 2e + 4f & d + 3e + 9f & d + e + f \\ g + 2h + 4i & g + 3h + 9i & g + h + i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Devemos ter:

$$\begin{cases} a + 2b + 4c = 1 \\ a + 3b + 9c = 0 \\ a + b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow a = -3, b = 4, c = -1$$

$$\begin{cases} d + 2e + 4f = 0 \\ d + 3e + 9f = 1 \\ d + e + f = 0 \end{cases} \Rightarrow d = 1, e = -\frac{3}{2}, f = \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} g + 2h + 4i = 0 \\ g + 3h + 9i = 0 \\ g + h + i = 1 \end{cases} \Rightarrow g = 3, h = -\frac{5}{2}, i = \frac{1}{2}$$

Portanto, vem:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 4 & -1 \\ 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 3 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

60. Observação

Do exposto, observamos que, para determinar a inversa de uma matriz quadrada de ordem n , temos de obter n^2 incógnitas, resolvendo n sistemas de n equações a n incógnitas cada um. Isso não é nada prático. No final do capítulo sobre determinantes, expomos um outro método para se obter a inversa de uma matriz.

Uma aplicação prática da inversa de uma matriz é exposta no início do capítulo sobre sistemas lineares.

EXERCÍCIOS

235. Determine a inversa de cada matriz abaixo:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

236. Determine a inversa de cada matriz abaixo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

237. Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ x & y \end{bmatrix}$ duas matrizes. Se B é a inversa de A, calcule o valor de $x + y$.

238. Sendo $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ x & x \end{bmatrix}$, determine os valores de x tais que $A + A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

239. Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, determine $(A + A^{-1})^3$.

240. Resolva a equação matricial:

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Solução 1

Fazendo $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = A$ e $\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = B$, vemos que a equação dada é $AX = B$.

Temos:

$\exists AX$, A é 2×2 e X é $m \times n \Rightarrow m = 2$

$AX = B$ e B é $2 \times 1 \Rightarrow n = 1$

Fazendo $X = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, vem:

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3a + 4b \\ 2a + 3b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a + 4b = -1 \\ 2a + 3b = -1 \end{cases}$$

e, então, $a = 1$ e $b = -1$; portanto, $X = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Solução 2

Notando que, se A é matriz inversível, então $AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$, temos:

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

241. Resolva as equações matriciais abaixo:

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 13 \\ 18 \end{bmatrix}$$

$$\text{c) } \begin{bmatrix} \cos a & \sin a \\ -\sin a & \cos a \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} \cos 2a \\ \sin 2a \end{bmatrix}$$

$$\text{b) } X \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\text{d) } \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 9 \\ -7 \end{bmatrix}$$

242. Resolva as equações matriciais abaixo:

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{b) } X \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ -6 \end{bmatrix}$$

243. Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, determine a matriz X , de ordem 2, tal que $AX = B$.

244. Dadas $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ e $B = \frac{1}{13} \begin{bmatrix} a & 10 \\ 75 & b \end{bmatrix}$, determine os valores de a e b , tais que $B = PAP^{-1}$.

245. Expresse X em função de A , B e C , sabendo que A , B e C são matrizes quadradas de ordem n inversíveis e $AXB = C$.

Solução

Vamos multiplicar ambos os membros da igualdade $AXB = C$ por A^{-1} :

$$A^{-1}AXB = A^{-1}C \Leftrightarrow I_n XB = A^{-1}C \Leftrightarrow XB = A^{-1}C$$

Vamos multiplicar ambos os membros da igualdade $XB = A^{-1}C$ por B^{-1} :

$$XBB^{-1} = A^{-1}CB^{-1} \Leftrightarrow XI_n = A^{-1}CB^{-1} \Leftrightarrow X = A^{-1}CB^{-1}$$

Temos, portanto: $X = A^{-1}CB^{-1}$.

246. Sendo A e B matrizes inversíveis de ordem n , isole X a partir de cada equação abaixo:

- a) $AX = B$ c) $(AX)^{-1} = B$ e) $(AX)^t = B$
 b) $AXB = I_n$ d) $BAX = A$ f) $(A + X)^t = B$

247. Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, determine a matriz X, de ordem 2, tal que $(XA)^{-1} = B$.

248. Determine X tal que:

- a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
 b) $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$

249. Prove que, se A e B são matrizes inversíveis de ordem n , então $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Solução

Para provarmos que $C = B^{-1}A^{-1}$ é a matriz inversa de AB, basta mostrar que $C(AB) = (AB)C = I_n$. De fato:

$$C(AB) = (B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}I_nB = B^{-1}B = I_n;$$

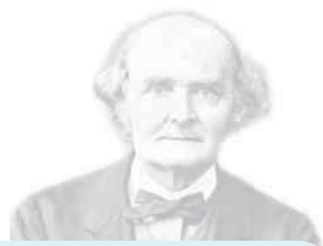
$$(AB)C = (AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n.$$

250. Prove que, se A, B e C são matrizes inversíveis de ordem n , então $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$.

251. Verifique diretamente que, se A é uma matriz inversível de ordem 2, então

$$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t.$$

LEITURA



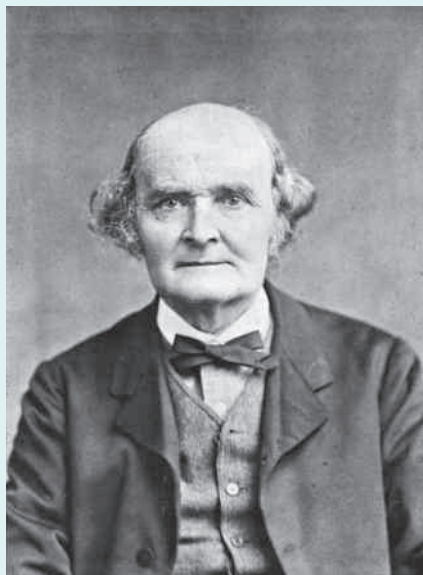
Cayley e a Teoria das Matrizes

Hygino H. Domingues

A disputa entre Newton e Leibniz (ou, mais exatamente, entre seus adeptos), em torno da primazia da criação do Cálculo, foi negativa para a matemática inglesa, embora Newton tivesse levado vantagem na polêmica. Considerando uma questão de honra nacional ser fiel ao seu mais eminente cientista, nos cem anos seguintes ao início desse episódio, os matemáticos britânicos fixaram-se nos métodos geométricos puros, preferidos de Newton, em detrimento dos métodos analíticos, muito mais produtivos. Como os matemáticos da Europa Continental exploraram grandemente estes últimos métodos nesse período, a matemática britânica acabou ficando bem para trás.

Mas acabou havendo uma reação e a matemática britânica conseguiu voltar ao primeiro plano no século XIX, especialmente em Álgebra, um campo que de modo geral ficara algo marginalizado nesse meio-tempo. E um dos maiores responsáveis por essa reascensão foi Arthur Cayley (1821-1895).

Natural de Richmond, Inglaterra, Cayley descendia de uma família que conciliava talento e tradição. Desde muito cedo demonstrou grande aptidão para os estudos. Diante disso, e atendendo a sugestões de alguns de seus professores, os pais resolveram enviá-lo para estudar em Cambridge, em vez de iniciá-lo nos negócios da família. Assim, em 1838 ingressa no Trinity College, onde iria se graduar com distinção máxima. Logo em seguida inicia-se no ensino, no próprio Trinity, mas desiste três anos depois, pois sua permanência exigiria abraçar a carreira religiosa, o que não estava em seus planos. Nos quinze anos seguintes dedicou-se à advocacia, mas com certeza não integralmente, como mostram os mais de duzentos artigos que publicou no período, na área de Matemática. Foi também nessa época que conheceu James Joseph Sylvester (1814-1897), outro dos grandes expoentes da “álgebra



MP/LEIMAGE/ATP

Arthur Cayley (1821-1895).

britânica” do século XIX, com quem estabeleceu sólida amizade, consolidada até por áreas de pesquisa comuns, como a teoria dos invariantes. Em 1863 aceita convite para ocupar uma nova cadeira de matemática pura criada em Cambridge, à testa da qual ficou até a morte (salvo um semestre de 1882, em que deu cursos nos Estados Unidos).

Em volume de produção matemática, em todos os tempos, Cayley talvez só seja superado por Euler e Cauchy. E, embora sua obra seja bastante diversificada, foi no campo da Álgebra, com a grande facilidade que tinha para formulações abstratas, que mais se sobressaiu. Assim, por exemplo, deve-se a ele, num artigo de 1854, a noção de **grupo abstrato**. (Galois, que introduzira o termo **grupo** em 1830, com o sentido atual, só considerara grupos de permutações.) Outra contribuição importante de Cayley, iniciada em 1843, é a geometria analítica n-dimensional, em cuja elaboração utiliza determinantes e coordenadas homogêneas como instrumentos essenciais.

O início da teoria das matrizes remonta a um artigo de Cayley de 1855. Diga-se de passagem, porém, que o termo **matriz** já fora usado, com o mesmo sentido, cinco anos antes por Sylvester. Nesse artigo, Cayley fez questão de salientar que, embora logicamente a ideia de matriz preceda a de determinante, historicamente ocorreu o contrário: de fato, os determinantes já eram usados há muito na resolução de sistemas lineares. Quanto às matrizes, Cayley introduziu-as para simplificar a notação de uma transformação linear. Assim, em lugar de

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases} \quad \text{escrevia} \quad (x', y') = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} (x, y).$$

A observação do efeito de duas transformações sucessivas sugeriu-lhe a definição de produto de matrizes. Daí chegou à ideia de inversa de uma matriz, o que obviamente pressupõe a de elemento neutro (no caso, a matriz idêntica). Curiosamente, foi só num outro artigo, três anos depois, que Cayley introduziu o conceito de adição de matrizes e o de multiplicação de matrizes por escalares, chamando inclusive a atenção para as propriedades algébricas dessas operações.

Ao desenvolver a teoria das matrizes, como outros assuntos, a grande preocupação de Cayley era com a forma e a estrutura em Álgebra. O século XX se encarregaria de encontrar inúmeras aplicações para suas matrizes.